ISTITUTO DI MATEMATICA
DEL POLITECNICO DI MILANO

Pubblicazione N. 21

CARLO FELICE MANARA

Sulle curve di diramazione dei piani multipli

Estratto dai *Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*
Vol. LXXXII. - 1949

MILANO
Anno 1949

SULLE CURVE DI DIRAMAZIONE DEI PIANI MULTIPLI

Nota del dott. CARLO FELICE MANARA

(Adunanza del 3 marzo 1949)

Sunto — Si dimostra l'identità birazionale di tutti i piani multipli diramati da una stessa curva razionale senza flessi.

§ 1. - In una sua recente Nota [1] il prof. Chisini ha dimostrato che due piani multipli aventi la stessa curva di diramazione (che soddisfi a determinate ipotesi) sono birazionalmente identici. Data l'importanza del Teorema, sia considerato in sè come per quanto se ne potrebbe dedurre, non crediamo inutile il dimostrarne direttamente alcune conseguenze in modo da ottenere, con la dimostrazione di queste, una conferma ed una verifica indiretta del Teorema stesso.

In questo ordine di idee la nostra attenzione è stata attirata dalle curve piane senza flessi; nella Nota citata il Chisini dimostra che una tale curva è sempre di diramazione per un piano multiplo, costruendo direttamente una funzione algebrica di due variabili da essa diramata; i valori di tale funzione in un punto del piano sono dati semplicemente dai valori dei coefficienti angolari delle tangenti alla curva che escono dal punto stesso.

Ci si può ora domandare se una tale curva sia di diramazione *soltanto* per un piano multiplo di questo tipo (o per un suo trasformato birazionale). Dimostreremo qui che a tale domanda si può dare risposta affermativa, almeno nel caso in cui la curva di cui si tratta sia razionale.

La dimostrazione di questo fatto è conseguita sostanzialmente in due tempi; si dimostra anzitutto (§ 2) che un piano multiplo

(1) Cfr. O. Chisini. — Sulla identità birazionale di due funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione. Rend Ist. Lombardo. Vol. 77.

diramato da una curva φ razionale senza flessi ha ordine uguale alla classe di φ stessa; in un secondo tempo si dimostra che ogni superficie Φ che proiettata da un determinato centro su di un piano dia origine ad un piano multiplo la cui curva di diramazione è senza flessi e razionale, possiede un fascio di curve razionali proiettate biunivocamente dal centro stesso nelle tangenti alla curva di diramazione. Dopo di che è facile far vedere che una tale superficie Φ è trasformabile birazionalmente in una rigata.

§ 2. - Sia dunque una curva φ irriducibile, razionale e senza flessi e di conseguenza, come è facile verificare, d'ordine n pari. Per i caratteri plückeriani di φ si hanno facilmente le espressioni:

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & n = 2\,\nu \\ & m = n/2 + 1 = \nu + 1 \\ & k = 3n/2 - 3 = 3\,(\nu - 1) \\ & \delta = (n-2)\,(n-4)/2 = 2\,(\nu - 1)\,(\nu - 2) \\ & \tau = n\,(n/2 - 1)/4 = \nu\,(\nu - 1)/2 \end{aligned} \right.
$$

Poniamo che φ sia curva di diramazione di un piano multiplo d'ordine μ che possiamo sempre supporre ottenuto mediante proiezione sul piano x, y dal punto improprio dell'asse z di una superficie Φ. Come è lecito senza ledere la generalità, supporremo che la Φ possegga soltanto singolarità ordinarie: curva doppia nodale e punti tripli, appartenenti alla suddetta curva doppia. Come abbiamo già visto la φ stessa è curva di diramazione di un piano multiplo il cui ordine è uguale alla classse m di φ e che si può sempre considerare ottenuto mediante proiezione dal punto improprio dell'asse z sul piano x, y d'una rigata a piano direttore, rigata che nel seguito, chiameremo rigata F.

Il nostro scopo sarà evidentemente raggiunto se dimostreremo che i piani multipli ottenuti per proiezione di F e di Φ sono birazionalmente identici, ossia che F e Φ sono trasformabili l'una nell'altra da una trasformazione birazionale del tipo

$$
\left\{ \begin{aligned} & x' = x \\ & y' = y \\ & z' = f\,(x, y, z) \end{aligned} \right.
$$

Prima di iniziare il seguito di deduzioni che ci condurranno al nostro scopo avvertiamo qui esplicitamente che supporremo la φ sia dotata di sole singolarità elementari tanto come luogo che come inviluppo e sia curva *generica* del sistema continuo di curve dotate dello stesso numero di nodi e cuspidi a cui essa appartiene e quindi nessuna delle singolarità che φ possiede si possa considerare come accidentale, ma tutte siano singolarità essenziali a φ come curva di diramazione. Questo porta in particolare a supporre che le cuspidi di φ siano sempre intersezioni del piano x, y con tangenti parallele all'asse z a contatto tripunto con la superficie Φ in un punto semplice di Φ stessa ed i nodi siano intersezioni del piano stesso con rette parallele all'asse z tangenti alla Φ in due punti distinti.

Dimostriamo ora anzitutto che, nelle ipotesi ammesse, sussiste il seguente:

TEOREMA 1° - L'ordine μ del piano multiplo ottenuto proiettando dal punto Z_∞ la superficie Φ è uguale alla classe della curva φ e quindi all'ordine del piano multiplo ottenuto proiettando la rigata F costruita sulla curva φ.

La dimostrazione si basa essenzialmente sulla seguente.

OSSERVAZIONE - Tutte le curve φ dello stesso ordine n, irriducibili, razionali, senza flessi appartengono ad un unico sistema continuo.

Infatti sono duali di curve pure tutte dello stesso ordine (m uguale alla classe delle φ) razionali e prive di cuspidi, curve che, come è noto, formano un unico sistema continuo.

Ora a quest'ultimo sistema appartiene anche evidentemente una curva possedente una tangente a contatto m — punto, cioè possedente un ramo di ordine 1 e classe $m - 1$. Di conseguenza al sistema delle φ appartiene anche una curva φ_1 dotata di un punto O di ordine $m - 1$ e classe 1, origine di un ramo superlineare ordinario. Poichè la curva φ_1 può essere ottenuta per variazione continua di una φ, è chiaro che anche φ_1 sarà di diramazione per un piano multiplo che avrà inoltre lo stesso ordine di quello diramato da φ.

Ora ho dimostrato altrove [2] che se la curva di diramazione di una funzione algebrica di due variabili possiede un punto multiplo O d'ordine r, origine di un ramo superlineare ordinario, le determinazioni della funzione scambiate tra loro nell'intorno di O sono precisamente in numero di $r + 1$. Nel nostro caso questo porterebbe a concludere che il piano multiplo diramato

(2) Cfr. C. F. Manara — La rappresentazione analitica di una funzione algebrica di due variabili nell'intorno di una sigolarità ordinaria della sua curva di diramazione. Rend. Ist. Lomb. Vol. 78 (1944-45).

da φ ha un ordine non minore di m. D'altra parte tale ordine non può valere $m + h$, con $h > 0$, altrimenti la g^1_{m+h} secata dalle rette parallele all'asse z sulla curva sezione della superficie Φ coi piani pure paralleli all'asse z dovrebbe avere non meno di $2(m + h) - 2$ diramazioni; il che è impossibile perchè l'ordine n della curva di diramazione φ è precisamente $n = 2m - 2$, come risulta dalle formule (1).

La dimostrazione di questo teorema potrebbe essere ottenuta anche per altra via e precisamente facendo degenerare la curva φ in ν rette doppie, ma questo procedimento ricalcherebbe troppo davvicino quello seguito dal Chisini (nella Nota cit. in (1)) e pertanto ci porterebbe lontani dal nostro scopo che è appunto quello di confermare indirettamente i risultati di questo A. cercando di conseguirli con procedimenti diversi dai suoi.

§ 3. - Dal teorema dimostrato al paragrafo precedente segue immediatamente che le sezioni di Φ con i piani generici paralleli all'asse z sono curve razionali; infatti la g^1_m secata su una tale sezione dalle rette parallele all'asse z ha $n = 2m - 2$ diramazioni. Di consegnenza la curva C sezione di Φ con un piano α tangente a Φ e parallelo all'asse z ha un punto in doppio più della sezione generica e quindi è spezzata in (almeno) due componenti razionali che diremo R ed S. I piani come α formano evidentemente un sistema algebrico Σ, semplicemente infinito birazionalmente identico alla curva φ, in quanto ottenuto proiettando dal punto Z_∞ il sistema delle tangenti di φ stessa. Ora sussiste il seguente:

Teorema 2° - Al variare di α nel sistema Σ le curve R ed S descrivono due sistemi algebrici distinti.

Infatti, detto N il nodo nuovo che la curva C sezione di Φ con α acquista rispetto alle sezioni generiche, se le due parti R ed S di C potessero venire portate l'una nell'altra mediante una circolazione di α nel sistema Σ anche i due rami della curva C in N verrebbero scambiati di conseguenza; e questo potrebbe avvenire soltanto in corrispondenza a piani α per cui le tangenti a C nel nodo N coincidessero, perchè la razionalità di Σ porta ad escludere la possibilità che i due rami possano venire scambiati mediante un giro riemanniano su Σ stesso.

Ora la possibilità che le tangenti a C in N coincidano perchè N diventa una cuspide è esclusa, giacchè porterebbe ad un piano α avente come traccia sul piano x, y una tangente di flesso della φ, mentre ulteriori coincidenze che avvengono perchè N viene a -

cadere in una intersezione di α con la curva doppia di Φ non dànno, come è facile verificare, diramazione tra i due rami della curva C nel punto N.

§ 4. - Il risultato del teorema enunciato al precedente paragrafo può essere ulteriormente precisato con un'analisi più accurata che stabilisca con maggior particolarità le proprietà delle curve R ed S in cui si spezza la curva C, sezione della superficie Φ con un piano α tangente parallelo all'asse z. A tal fine ricordiamo che la C viene proiettata m volte sulla tangente t a φ — traccia di α sul piano x, y — il punto di contatto N di α con Φ essendo proiettato nel punto T di contatto di t con φ ed i punti di diramazione della g^1_m secata dalle rette parallele all'asse z essendo proiettati nei tangenziali di T. Ora questa g^1_m si spezza evidentemente nella somma di una g^1_r e di una g^1_s secata dalle parallele all'asse z rispettivamente sulle parti R ed S in cui si spezza C.

Se i due numeri r ed s fossero entrambi maggiori di uno tanto la g^1_r che la g^1_s ammetterebbero punti di diramazione e ne seguirebbe che sulla φ il sistema dei tangenziali di un punto variabile T si spezzerebbe in due sistemi algebrici distinti, quello dei tangenziali che dànno punti di diramazione di g^1_r e quello dei tangenziali che dànno punti di diramazione di g^1_s.
Sulla φ nascerebbe quindi una corrispondenza algebrica, essendo corrispondenti in essa due punti quando siano tangenziali di uno stesso punto T ed appartengono a due sistemi diversi: questa corrispondenza sull'ente razionale φ ammetterebbe necessariamente un uumero non nullo di punti uniti. Sia U uno di questi punti: U dovrebbe essere di diramazione tanto per la g^1_r quanto per la g^1_s ossia dovrebbe essere traccia di una retta parallela all'asse z e bitangente alla Φ. Il che è assurdo perchè tali tracce sono date dai nodi di φ, mentre le coincidenze della nostra corrispondenza devono appartenere ad un unico ramo di φ stessa. È assurda quindi l'ipotesi da cui siamo partiti, che i due numeri r ed s fossero entrambi maggiori di uno; possiamo dunque concludere la nostra analisi enunciando il seguente:

Teorema 3° - Su una delle due curve R ed S in cui si spezza la sezione della superficie Φ con un piano tangente α le rette parallele all'asse z secano una g_1^1

Nel seguito immagineremo di aver chiamato R la curva, parte di C, che ha la proprietà di essere unisecata (in punti variabili) dalle parallele all'asse z.

§ 5. - Il teorema dimostrato nel precedente paragrafo ci permette di concludere che esiste sulla superficie Φ un sistema razionale semplicemente infinito di curve R che vengono proiettate biunivocamente dal punto improprio dell'asse z sulle tangenti alla curva φ. Ora è chiaro che sulla Φ le curve R formano un fascio; infatti per qualunque punto della Φ stessa deve passare sempre lo stesso numero i di curve R: d'altra parte per un punto N che sia di contatto per un piano tangente α parallelo all'asse z ne passa una sola.

Segue di qui che dato un punto P di Φ è razionalmente determinato un punto P della rigata F più sopra definita, e precisamente quello che ha la stessa proiezione di P sul piano x, y e che appartiene a quella retta di F che si proietta sulla stessa tangente a φ su cui viene proiettata la curva R di Φ passante per P. Viceversa, con procedimento perfettamente analogo, dato un punto P′ di F è definito razionalmente un punto P di Φ che ha la sua stessa proiezione sul piano x, y.

Ne consegue, come avevamo annunciato il:

TEOREMA 4° - Ogni funzione algebrica di due variabili x, y avente una curva di diramazione φ razionale e sprovvista di flessi è birazionalmente identica alla funzione i cui valori in un punto del piano sono dati dai coefficienti angolari delle tangenti mandate alla φ dal punto stesso.

In forma proiettiva equivalente, il teorema può essere enunciato come segue:

TEOREMA 4° - Ogni superficie Φ avente come proiezione del suo contorno apparente sul piano x, y dal punto improprio dell'asse z una curva razionale senza flessi è trasformabile in una rigata con una trasformazione birazionale del tipo

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = f\,(x, y, z). \end{cases}$$

Estratto dai *Rendiconti* dell'Istituto Lombardo di scienze e lettere
Vol. LXXXI, 12° della Serie III, Fasc. I.

Pavia — Premiata Tipografia Successori Fusi — 1949

ISTITUTO DI MATEMATICA DEL POLITECNICO DI MILANO

Pubblicazioni

N. 1 — **G. Peretti** — Significato del tensore arbitrario che interviene nell'integrale generale delle equazioni della statica dei continui. *1948*

N. 2 — **P. Udeschini** — Moto plastico-viscoso dei ghiacciai. *1948*

N. 3 — **E. Storchi** — Sulle somme dei prodotti k a k dei primi n numeri della serie naturale. *1948*

N. 4 — **G. Masotti Biggiogero** — Sulla caratterizzazione della curva di diramazione dei piani quadrupli generali. *1948*

N. 5 — **M. Dedò** — Invarianti per trasformazioni puntuali singolari dei rami superlineari delle curve algebriche piane. *1948*

N. 6 — **B. Finzi** — Formulazione integrale delle leggi elettromagnetiche nello spazio-tempo. *1948*

N. 7 — **B. Finzi** — Discontinuità sul fronte d'onda delle azioni gravitazionali. *1949*

N. 8 — **P. Udeschini** — Sulla indeterminazione del tensore energetico nello spazio-tempo. *1949*

N. 9 — **A. M. Pratelli** — Lavoro e flusso dei tensori emisimmetrici. *1949*

N. 10 — **P. Udeschini** — Meccanica Aleatoria. *1949*

N. 11 — **P. Udeschini** — La Plasticità nella Meccanica Aleatoria. *1949*

N. 12 — **E. Storchi** — Legame fra la forma del pelo libero e quella del recipiente nelle oscillazioni di un liquido. *1949*

N. 13 — **E. Storchi** — Congruenze che caratterizzano i numeri primi. *1949*

N. 14 — **M. Dedò** — Sulle trasformazioni quadratiche e su alcuni procedimenti classici in cui esse si presentano implicitamente. *1949*

N. 15 — **B. Finzi** — Il Campo Elettromagnetico nello spazio-tempo. *1949*

N. 16 — **A. Masotti** — Una relazione inedita di Paolo Frisi sopra l'Osservatorio di Brera. *1949*

N. 17 — **A. Masotti** — Commemorazione di Bonaventura Cavalieri *1949*

N. 18 — **G. Masotti Biggiogero** — Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani quadrupli. *1949*

N. 19 — **A. Masotti** — Un piano inedito di Paolo Frisi per una Accademia Scientifica e Letteraria. *1949*

N. 20 — **C. F. Manara** — Sulla caratterizzazione delle ipersuperficie di diramazione degli S_n tripli. *1949*

TIP. ACHILLEA V. FOSSATI - ASSO